Groupes à Lyon

Nicolas Ressayre

Université Lyon 1

Mardi 13 janvier 2015

Algebraic groups and Representations
http://groupesalyon.univ-lyon1.fr

2 juin – 11 juillet 2014

Organisateurs/Com. scient. : P. Gille, B. Remy, NR, A. Thuiller, M. Brion/ B. Conrad (Stanford), W. Soergel (Freiburg).

2 Semaines École d'été : 8 minicours
2 Ateliers sur des sujets ciblés
2 Semaines de conférences : 43 exposés

Fréquentation : $\simeq 50$ étudiants, $\simeq 4 \times 30$ collègues.

Budget

Source	Montant
IUF	15 k€
ANR Gatho	10 k€
ANR Gercher	6 k€
Labex	62 k€
Total	93 k€

Thèmes

Groupes Algébriques :

- Structure, groupes pseudo-réductifs
- Représentations linéaires

Dans chacun de ces deux domaines, progrés récents:

- Conrad-Gabber-Prassad ont « achevé » la description, initiée par J. Tits, de la structure des groupes algébriques lisses sur un corps quelconque.
- G. Williamson a obtenu un contre-exempe à la conjecture de Lusztig.

Problème de Horn multiplicatif

- Soit K un groupe de Lie compact simple simplement connexe. On se donne deux classes de conjugaisons $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dans K. On se demande

  Quelles classes de conjugaisons $\mathcal{O}_3$ sont incluses dans $\mathcal{O}_1.\mathcal{O}_2$?

Problème de Horn multiplicatif

- Soit K un groupe de Lie compact simple simplement connexe. On se donne deux classes de conjugaisons $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dans K. On se demande

  Quelles classes de conjugaisons $\mathcal{O}_3$ sont incluses dans $\mathcal{O}_1.\mathcal{O}_2$?

- Plus généralement,

$$\begin{array}{ccc} K/K & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{O}_\tau & \longleftarrow\!\!\!\! \shortmid & \tau \end{array}$$

Problème de Horn multiplicatif

- Soit K un groupe de Lie compact simple simplement connexe. On se donne deux classes de conjugaisons $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dans K. On se demande

  Quelles classes de conjugaisons $\mathcal{O}_3$ sont incluses dans $\mathcal{O}_1.\mathcal{O}_2$?

- Plus généralement,

$$\begin{array}{ccc} K/K & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{O}_\tau & \longleftarrow & \tau \end{array}$$

- On veut décrire

$$\mathcal{P}_K = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathcal{A}^3 \,:\, \mathcal{O}_{\tau_1} \cdot \mathcal{O}_{\tau_2} \cdot \mathcal{O}_{\tau_3} \ni e\}.$$

Problème de Horn multiplicatif

- Soit K un groupe de Lie compact simple simplement connexe. On se donne deux classes de conjugaisons $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dans K. On se demande

  Quelles classes de conjugaisons $\mathcal{O}_3$ sont incluses dans $\mathcal{O}_1.\mathcal{O}_2$?

- Plus généralement,

$$\begin{array}{ccc} K/K & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{O}_\tau & \longleftarrow & \tau \end{array}$$

- On veut décrire

$$\mathcal{P}_K = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathcal{A}^3 \,:\, \mathcal{O}_{\tau_1} \cdot \mathcal{O}_{\tau_2} \cdot \mathcal{O}_{\tau_3} \ni e\}.$$

- Résultat qualitatif (Meirenken-Woodward) : $\mathcal{P}_K$ est un polytope convexe.

Une solution

Théorème (Belkale-Kumar (2013), R. (2013))

Soit $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathcal{A}^3$. *Alors* $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathcal{P}_K$ *ssi*

$$\langle w_1\varpi_i, \tau_1\rangle + \langle w_2\varpi_i, \tau_2\rangle + \langle w_3\varpi_i, \tau_3\rangle \leq d, \tag{1}$$

pour tout poids fondamental ϖ_i, *tout entier* $d \geq 0$ *et tout triplet* $(w_1, w_2, w_3) \in W^{P_i}$ *tels que*

$$GW(w_1, w_2, w_3; d) = 1, \tag{2}$$

et

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_j \sharp\,\Phi(w_j)_\ell + d \sum_{\beta \in \Phi_\ell} \langle \alpha^\vee, \beta\rangle = 2\,\sharp\,\Phi_\ell \tag{3}$$

Théorème (Belkale-Kumar (2013))

Cette liste d'inégalités est irredondante.

$$\mathcal{A} = \{\tau^1 \geq \cdots \geq \tau^{n-1} \geq |\tau^n|\} \subset (\mathbb{R}^n, \varepsilon_i)$$

Pour $i = 1, \ldots, n-2$, $\varpi_i = \varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_i^*$ et

$$\varpi_{n-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_{n-1}^* - \varepsilon_n^*) \qquad \varpi_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^* + \cdots + \varepsilon_{n-1}^* + \varepsilon_n^*).$$

$$w_i \in W = \mathrm{Sym}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}.$$

Pour $i = 1, \ldots, n$ on a $\mathrm{Gr}(i, \mathbb{C}^{2n})$ et $X_{w_i} \subset \mathrm{Gr}(i, \mathbb{C}^{2n})$.

Alors

$$GW(w_1, w_2, w3; d) = \sharp\{\gamma : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Gr}(i, \mathbb{C}^{2n}) : \gamma \text{ passe par les } g_i X_{w_i}\}.$$

Algèbre graduée : $QH^*(\mathrm{Gr}(i, \mathbb{C}^{2n}))$. La condition (3) rafine la condition de degré impliquée par la condition (2).

Calculs

Groupe	TW	Sommets	Facettes
G_2	82	30	48
$Sp(4)$	42	13	38
$Sp(6)$	329	66	200
$Sp(8)$	3 604	444	1 204
$Sp(10)$	44 211	3 162	7 310
$Sp(12)$	556 383	20 839	43 136
$Spin(7)$	322	65	191
$Spin(8)$	1 347	137	771
$Spin(9)$	3 231	385	1 046
$Spin(10)$	27 814	1 296	6 538
$Spin(11)$	34 152	2 236	5 734
$Spin(13)$	356 942	12 269	30 753